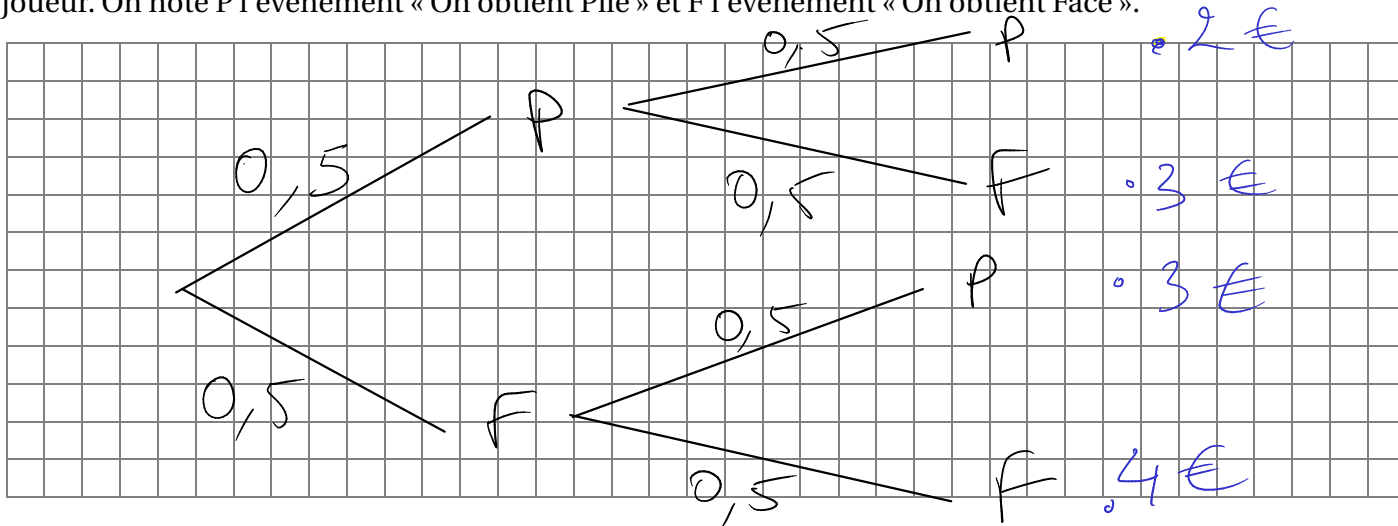


Variables aléatoires

I] Variable aléatoire

1. Exemple et principe de l'arbre pondéré

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. Si on obtient Pile, on gagne 1 €, sinon on gagne 2 €. On définit la variable aléatoire X qui, à chaque issue du jeu, associe la somme gagnée par le joueur. On note P l'événement « On obtient Pile » et F l'événement « On obtient Face ».



2. Définition

On considère une expérience aléatoire. Définir une variable aléatoire, c'est associer à chaque issue de l'expérience un nombre réel. On la note à l'aide d'une lettre majuscule : X ou Y par exemple.

$$X \in \{2; 3; 4\}$$

II] Loi de probabilité

On considère une expérience aléatoire sur laquelle on a défini une variable aléatoire X . Définir la loi de probabilité de X , c'est associer, à chaque valeur de la variable aléatoire, la probabilité de l'événement associé.

x_i	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,25	0,5	0,25

$$\begin{aligned}
 P(X=3) &= 0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5 \\
 &= 0,25 + 0,25 \\
 &= 0,5
 \end{aligned}$$

$$0,5 = \frac{5}{10} \quad 0,5 \times 0,5 = \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{25}{100} = 0,25$$

III] Espérance

1. Définition et calcul

On considère une expérience aléatoire sur laquelle on a défini une variable aléatoire X . On donne la loi de probabilité de X .

L'espérance de X , notée $E(X)$ est définie par : $E(X) = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n$.

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \times 0,25 + 3 \times 0,5 + 4 \times 0,25 \\ &= 0,5 + 1,5 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

2. Signification de l'espérance

L'espérance correspond à la valeur moyenne de la variable aléatoire que l'on peut espérer lorsque l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

gain « moyen » de 3 €
Ex: on joue 10 000 fois
 $10000 \times 3 = 30000$ €

```
1 n = 10000
2 def UnJeu():
3     r = choice(["P", "F"]) + choice(["P", "F"])
4     gain = r.count("P") + 2 * r.count("F")
5     print(r, gain, end=" ")
6     return gain
7
8 gainTotal = 0
9 for i in range(n):
10     gainTotal += UnJeu()
11 print('\n', gainTotal, "€")
```

Exécuter

PP 2 FP 3 FP 3 PF 3 FP 3 FF 4 PP 2 FP 3 FP 3 PP 2 PP 2
30079 €
en moyenne: 3.01

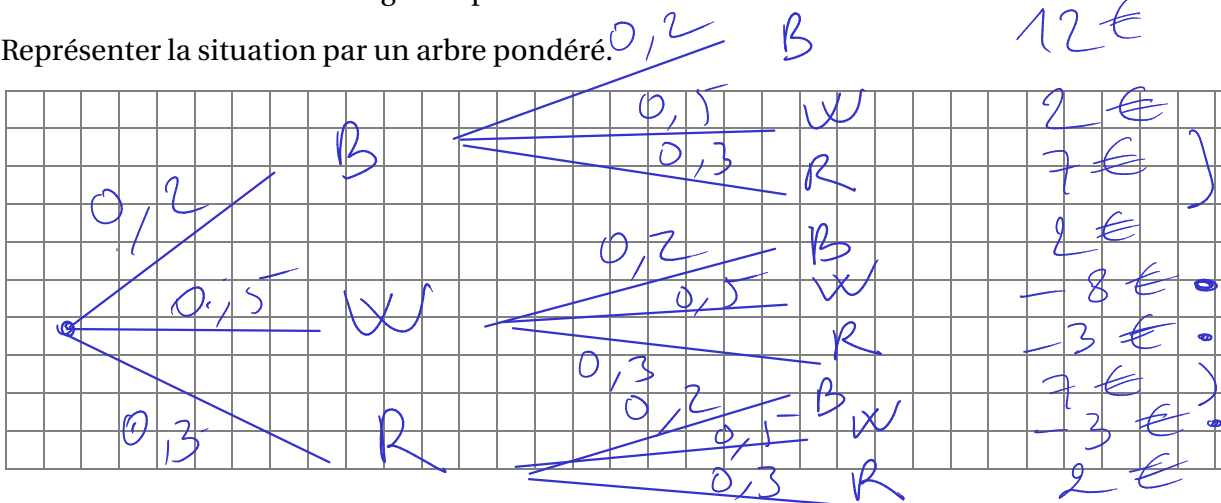
IV) Exercices

1. Exercice 1

B

À la fête foraine, on propose le jeu suivant : on tire une boule d'un sac, qui contient deux boules bleues, cinq boules blanches, et trois boules rouges. Si la boule est blanche, on ne gagne rien. Si la boule est rouge, on gagne 5 €. Si la boule est bleue, on gagne 10 €. On remet la boule dans le sac puis on en retire une autre en suivant la même règle. La partie coûte 8 €.

a. Représenter la situation par un arbre pondéré.



b. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur, c'est-à-dire son gain moins sa mise. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité de X.

X	Gain	-8	-3	2	7	12
	P	0,25	0,30	0,29	0,12	0,04

c. Quelle est la probabilité que le joueur soit gagnant ?

$$0,29 + 0,12 + 0,04 = 0,45$$

d. Calculer l'espérance de cette loi de probabilité et conclure.

$$\begin{aligned}
 E(X) &= -8 \times 0,25 - 3 \times 0,3 + \\
 & 2 \times 0,29 + 7 \times 0,12 + 12 \times 0,04 \\
 &= -2 - 0,9 + 0,58 + 0,84 \\
 & + 0,48 = -2,9 + 1,9 \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

