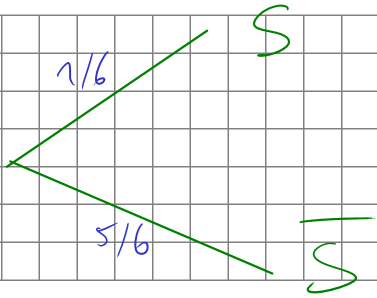
Probabilités : loi binomiale

I] Activité d'introduction

1. On lance 1 dé et on s'intéresse au nombre X de six. Représenter l'expérience à l'aide d'un arbre de probabilités et exprimer la loi de probabilité dans un tableau. Calculer l'espérance de cette loi de probabilités.

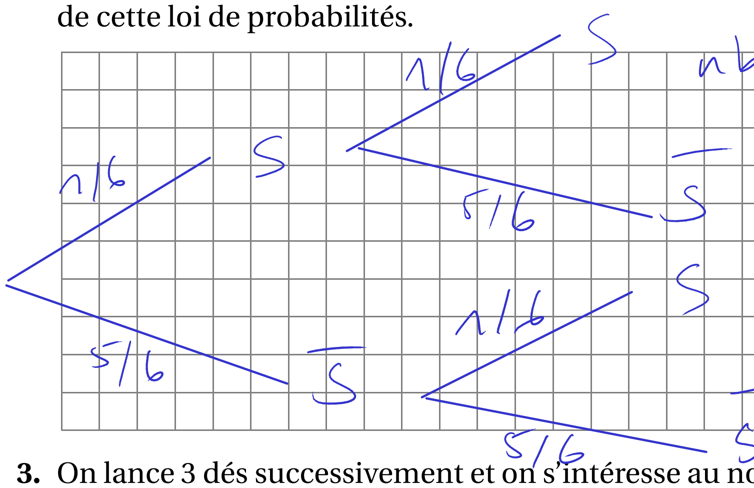
$B(1; \frac{1}{6})$



x_i	0	1
$P(X=x_i)$	5/6	1/6

$E(X) = 0 \times \frac{5}{6} + 1 \times \frac{1}{6}$
$= \frac{1}{6}$

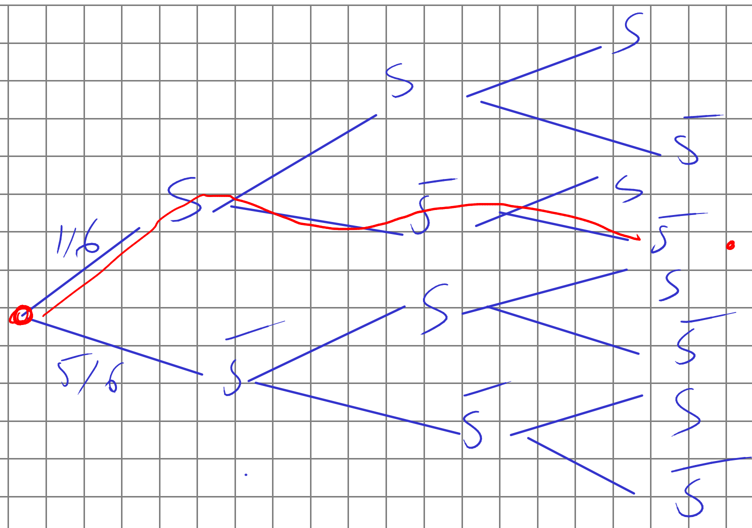
2. On lance 2 dés successivement et on s'intéresse au nombre X de six obtenus. Représenter l'expérience à l'aide d'un arbre de probabilités et exprimer la loi de probabilité dans un tableau. Calculer l'espérance de cette loi de probabilités.



nb de S	0	1	2
p	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

$E(X) = \frac{12}{36}$
$= \frac{1}{3}$

3. On lance 3 dés successivement et on s'intéresse au nombre X de six obtenus. Représenter l'expérience à l'aide d'un arbre de probabilités et exprimer la loi de probabilité dans un tableau. Calculer l'espérance de cette loi de probabilités.



n	0	1	2	3
p	$\frac{125}{216}$	$3 \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$ $\frac{75}{216}$	$3 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$ $\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

$E(X) = \frac{108}{216}$
$= \frac{1}{2}$

4. etc

la misère !

x_i	0	1	...	15
$P(X=x_i)$	.	.	.	.

II] La loi binomiale et le calcul des probabilités en général

1. Loi binomiale de paramètres n et p.

On répète n fois, de manière indépendante, une expérience de probabilité de succès p, et on compte le nombre X de succès. X suit la loi binomiale de paramètres n et p

2. Nombre de chemins dans un arbre : le coefficient binomial.

$\binom{n}{k}$, qui se lit « k parmi n », est le nombre de branches rencontrant k succès dans un arbre à n étages.

Ex : $\binom{3}{1}=3$ $\binom{3}{0}=1$ $\binom{3}{2}$

$\binom{4}{0}=1$ $\binom{4}{1}=4$ $\binom{4}{2}=6$ $\binom{4}{3}=4$ $\binom{4}{4}=1$

3. Triangle de Pascal.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

4. La formule

n et p

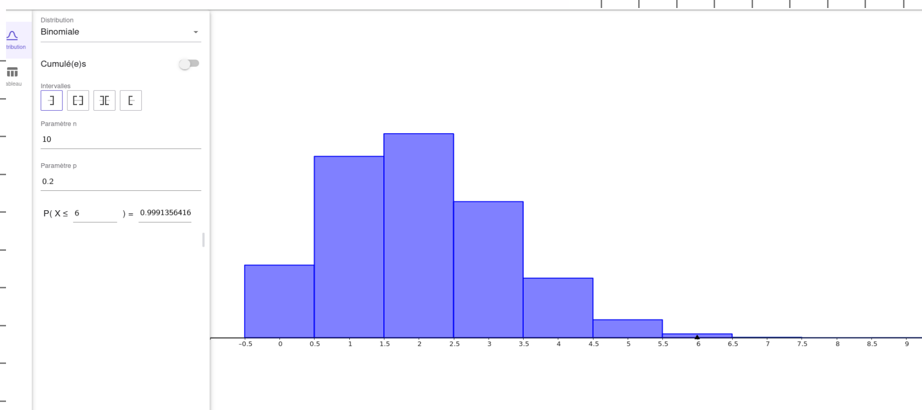
$$P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^{k}\times(1-p)^{n-k}$$

ex : $n=10$ $p=0{,}2$

$$P(X=7)=\binom{10}{7}\times 0{,}2^{7}\times 0{,}8^{3}$$

5. Avec Geogebra / Calculatrice

$$\binom{10}{3} \qquad 120$$



6. Espérance d'une loi binomiale.

$$\boxed{E(X)=n\times p}$$

Ex : 10 000 dés $n=10000$ $p=\frac{1}{6}$

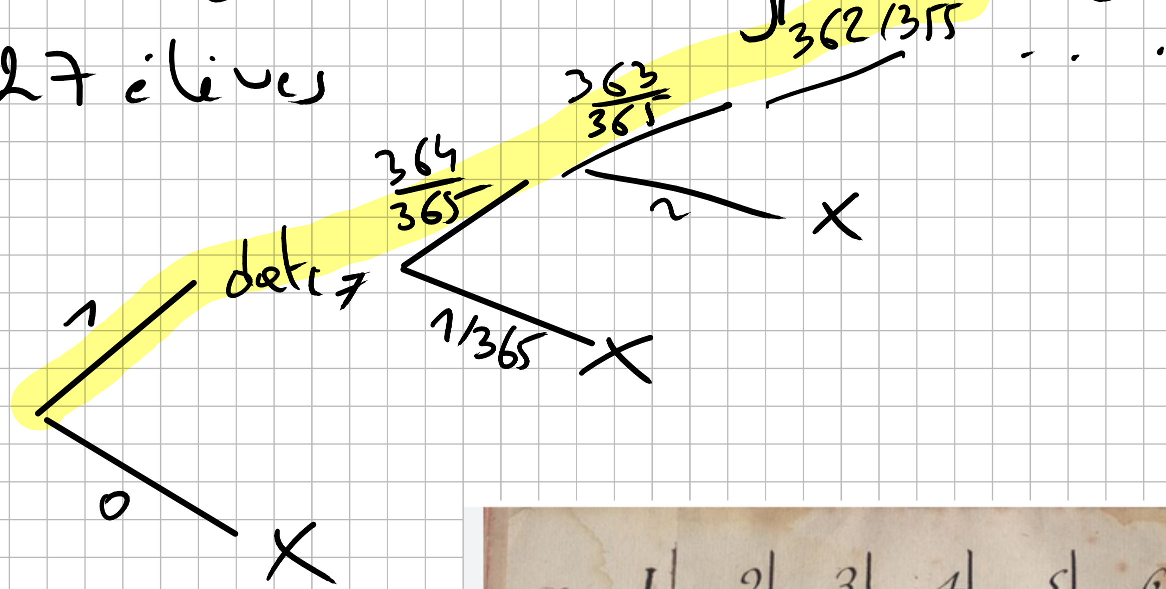
$$E(X)=10\,000\times\frac{1}{6}\simeq 1\,600$$

* 26/10 * 26/10 0,03 ?

A : « deux élèves dans la classe ont la même date d'anniv' »

$\bar{A}$: « tous les élèves ont une date d'anniv' différente »

27 élèves



Z.	1	2	3	4	5	6	7
1	G 1	σ 1	π 1	λ 1	μ 1	δ 1	3 1
2	φ 1	ψ 2	θ 3	R 4	S 5	N 6	7
3	A 1	B 3	C 6	ω 10	ξ 15	21	28
4	D 1	E 4	F 10	ρ 20	Y 35	56	84
5	H 1	M 5	K 15	35	70	126	
6	P 1	Q 6	21	56	126		
7	V 1	7	28	84			
8	1	8	36				
9	1	9					
10	1						

Rangs perpendiculaires

$$P(\bar{A}) = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots$$

$$\times \frac{339}{365} = \frac{365 \times 364 \times \cdots \times 339}{365^{27}}$$

$$= 0,37$$

$$P(A) = 0,63$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3$$

$$ab^2 + 1b^3$$

$$(1+x)^6 = 1x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3$$

$$+ 15x^2 + 6x + 1$$

---

hors programme (!)

$$\binom{13}{6} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$\times \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}$$

$$= \frac{13!}{6! \cdot 7!}$$

$$\binom{13}{6} = \frac{13!}{6!\,(13-6)!}$$