Probabilités

Ω omega

I] Expérience aléatoire

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont les résultats possibles sont connus sans que l'on puisse déterminer lequel sera réalisé.
- Une **issue** est un des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- L'**univers** associé à une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes ses issues possibles.

Ex : on jette un dé
une issue : « faire 6 »
$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

II] Loi de probabilité

Définir une loi de probabilité pour une expérience aléatoire dont l'univers est $\Omega = \{x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n\}$ consiste à attribuer à chacune des issues un nombre p_i positif ou nul, appelé probabilité, tel que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.
En répétant un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de chaque issue se stabilise autour d'une valeur. Il est donc raisonnable de prendre cette valeur comme probabilité de l'issue.
Exemple :

- Pour l'expérience précédente :
  $p_1 = \frac{1}{6}$ $p_2 = \frac{1}{6}$ … $p_6 = \frac{1}{6}$
- Lancer deux dés et faire la somme. $\Omega = \{2 ; 3 ; \ldots ; 12\}$
  probabilité de somme 7 = 0,16

```
2  : 0.0258
3  : 0.0568
4  : 0.0807
5  : 0.114
6  : 0.138
7  : 0.163
8  : 0.141
9  : 0.111
10 : 0.0842
11 : 0.0561
12 : 0.0294
```

Situation d'équiprobabilité :

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$\frac{5}{36} = 0,138$

III] Événement

- Un événement A est un ensemble d'issues : c'est une partie de l'univers Ω.
- Une issue x_i réalise l'événement A lorsque x_i est un élément de A.
- Un événement élémentaire est un événement qui ne contient qu'une seule issue. B
- Un événement impossible est un événement qui n'est réalisé par aucune issue. C
- Un événement certain est un événement qui est réalisé par toutes les issues. D
- La probabilité de A, notée P(A), est la somme des probabilités des issues de A.

Exemple :

On lance deux dés et on fait la somme

$\Omega = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}$

$A = \{3 ; 4 ; 5\}$ 4 réalise A

$B = \{6\}$ $C = \{1\}$ $P(C) = 0$

D : « faire moins que 15 » $P(D) = 1$

IV] Intersection et réunion d'événements

1. Vocabulaire

Soient A et B deux événements d'un univers Ω.

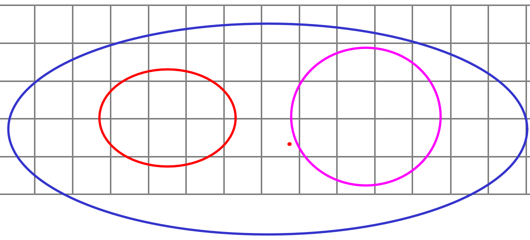
- L'intersection de A et B est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A et B (les deux à la fois).
  notation :

  $A \cap B$ « A et B »

- La réunion de A et B est l'ensemble des issues qui réalisent A ou B (au moins l'un des deux).
  notation :

  $A \cup B$ « A ou B »

- Les événements A et B sont incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$. ← ensemble vide



2. Formule

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Ex : 52 cartes R : « on tire un roi » C : « on tire un coeur »

$P(R) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ $P(C) = \frac{13}{52}$

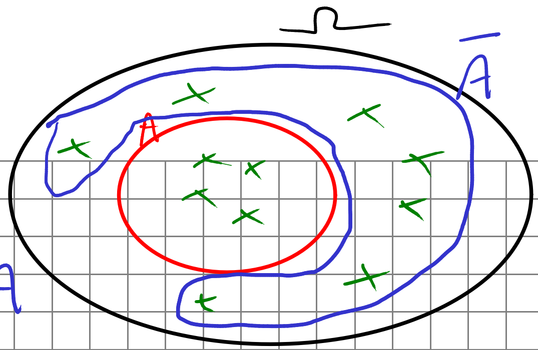
$P(R \cup C) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52}$ $P(R \cap C) = \frac{1}{52}$

$= \frac{16}{52}$

« un roi ou un coeur »

V] Événement complémentaire

1. Définition :



$\bar{A}$ est le contraire de A

$A \cup \bar{A} = \Omega$

$A \cap \bar{A} = \emptyset$

2. Formule

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

V] Exercices

1. On lance un dé à douze faces numérotées de 1 à 12. On considère les événements :

- A : « on obtient un diviseur de 12 » ;
- B : « on obtient un multiple de 3 » ;
- C : « on obtient un nombre premier ».

$A = \{1;2;3;4;6;12\}$

$B = \{3;6;9;12\}$

$C = \{2;3;5;7;11\}$

a. Déterminer P(A), P(B) et P(C).

$P(A) = \frac{6}{12} = 0,5$

$P(B) = \frac{4}{12} = 0,33$

$P(C) = \frac{5}{12} = 0,42$

b. Définir par une phrase l'événement A∩B et en déduire sa probabilité.

∩ et

« le résultat est diviseur de 12 et multiple de 3 »

$P(A \cap B) = \frac{3}{12} = 0,25$

c. Définir par une phrase l'événement A∩C et en déduire sa probabilité.

« le nombre est diviseur de 12 et premier »

$P(A \cap C) = \frac{2}{12} = 0,16$

d. Définir par une phrase l'événement B∩C et en déduire sa probabilité.

« multiple de 3 et premier »

$P(B \cap C) = \frac{1}{12}$

2. Dans un village, il y a deux boulangeries. On considère les événements :

- A : « la première boulangerie est ouverte » ;
- B : « la deuxième boulangerie est ouverte ».

On sait que P(A)=0,6 et P(B)=0,8. De plus, il y a toujours au moins une des deux boulangeries ouverte. Exprimer chacun des événements suivants en fonction des événements A et B et déterminer leur probabilité.

a. D : « au moins une des deux boulangeries est ouverte » ;

$D = A \cup B \qquad P(D) = 1$

b. E : « aucune boulangerie n'est ouverte » ;

$E = \overline{D} = \overline{A \cup B} \qquad P(E) = 0$

c. F : « les deux boulangeries sont ouvertes ».

$F = A \cap B \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(F) = 0,4 \qquad 1 = 0,6 + 0,8 - P(F)$

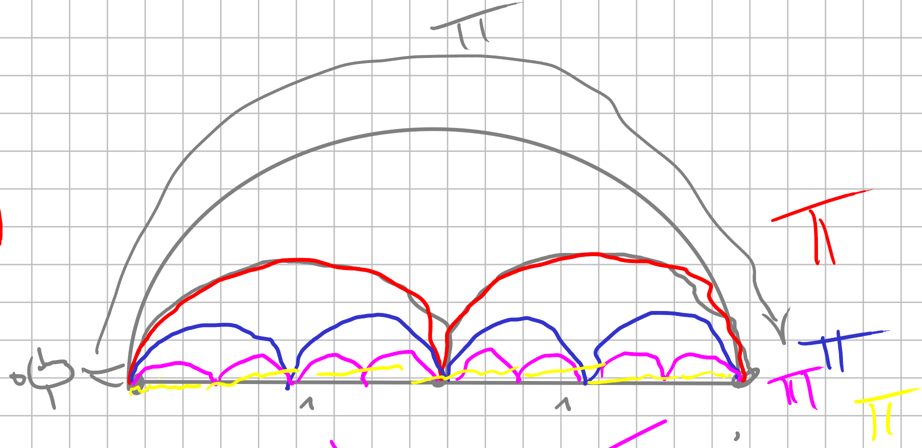
$1 = 1,4 - P(F)$

3. On lance trois fois de suite une pièce équilibrée. On note A l'événement : « on obtient trois fois face ». Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois « pile ».

4. En France, il y a 16 % de gauchers, 30 % de personnes qui ont les yeux bleus et 3 % de gauchers aux yeux bleus.
Quelle est la probabilité qu'un individu pris au hasard ne soit pas gaucher et n'ait pas les yeux bleus ?

5. Une usine fabrique des objets destinés à être commercialisés. Sur 100 objets qui sortent de l'usine, en moyenne, 15 ont le défaut A, 7 ont le défaut B et 6 ont les deux défauts.
Calculer la probabilité qu'un objet n'ait aucun défaut.

3 14



$\cancel{\pi = 2}$?